XII. *Tentamen continens Theoriam Machinæ ſublicarum.*

Autore Thoma Bugge, *Aſtronomo Regio, Aſtron. et Mathem. Prof. in Academia* Havnienſi, *e Societatibus Scient.* Havnienſ. *et* Nidroſ. *Communicated by Sir* John Pringle, *Bart. F. R. S.*

Read Dec. 24, 1779.

INTER innumera commoda, quæ ſocietati civili adfert Mechanica, haud minimum eſt ars ſublicas adigendi, ſeu, palos majores trabeſque oblongas terræ impingendi. Artem hanc veteribus non fuiſſe ignotam ex pluribus VITRUVII locis poteſt probari. Etiam ſi celeberrimus hic antiquitatis autor machinam non deſcribat, tamen extra omne dubium poſita eſt veterum in hac arte peritia. Sine ea enim impoſſible fuiſſet exſtruere pontes, molas, aggeres, pyramides, columnas, ædificia, quorum molem, majeſtatem, firmitatemque venerabundi admiramur et vix imitari audemus. Hæc omnia requirunt fortiſſimas et ſolidiſſimas ſubſtructiones. Si loca ſint congeſtitia et paluſtria, ſublicæ machinarum vi adiguntur, tunc imponitur craticula; plures ſublicæ impinguntur, capitibus promi-

prominentibus; earum intercapedines opplentur lapidibus majoribus, ſilicibus, arena majori foſſitia et mortario, quibus fundamentis demum ſuperſtruenda ſunt ædificia.

Forma machinæ, qua veteres architectones ſublicas adegerunt, non ſatis conſtat. Recentiores varias ei dederunt compages et configurationes. Complures deſcripſerunt LEOPOLD, DESAGULIERS, et BELIDOR. Inter has eminet et palmam omnibus præripit ſublicarum machina VAULOUE inventa, a DESAGULIERS deſcripta, ac in uſum perducta dum fundamenta pontis Weſtmonaſterienſis conjicerentur. Præcipua ejus commoda ſunt, ut ad onus (quod arietem vocare licet) elevandum minor requiratur hominum numerus, ut aries ad majorem elevatus altitudinem libere decidat, utque arietem deciduum luſu machinæ iterum arripiat forceps, et mox elevet; quibus machinamentis breviſſimo temporis ſpatio et pauciſſimis operariis maximus ſublicarum numerus ad maximam profunditatem adigi poſſunt.

Theoriam effectus hujus machinæ quidem dedit BELIDOR. Sed, quantum video, eam ſuperſtruxit fundamento prorſus erroneo et parum ſolido; eam deducit ex regulis colliſionis corporum, conſiderando ſublicam terræ impingendam et onus deciduum tanquam corpora colliſa. Quis autem non vidit regulas colliſionis ſupponere motum liberum, et medium non reſiſtens? Nullo ergo jure in dato caſu, ubi ſublicæ ſoli reſiſtentia valde magna opponitur, applicari poteſt. Tentabimus aliam explicare hujus machinæ theoriam.

Res eo redit, ut onus ingens ex certa altitudine cadens percutiat ſublicarum capita annulo ferreo cincta; conſiderabimus duas machinas; vocabimus onera cadentia = O et o; altitudines, e quibus decidunt = A et a; ſublicarum adigendarum maſſas = M et m; ſuperficies earum, quoad terræ impactæ ſunt = S et s; et profunditates ſublicarum in ſolo = P et p. Percurſio oneris cadentis inſtar virium vivarum eſt æſtimanda per productum ex maſſa oneris in quadratum celeritatis; hoc autem quadratum proportionale eſt altitudini, ex qua cadit onus; proinde percurſio æſtimari poteſt per factum ex maſſa oneris impingentis in altitudinem computatam a ſupremo puncto ad caput ſublicæ. Sed effectus ſunt uti vires cauſarum ſuarum plenæ. Ergo, ſi reſiſtentiam ſoli et maſſas ſublicarum utrobique æquales ſtatuamus, profunditates, ad quas ſingulis percurſionibus adiguntur ſublicæ, erunt in ratione compoſita è rationibus directis onerum et altitudinum; ſeu

$$p : \text{P} = a \times o : \text{A} \times \text{O}.$$

Si ſumamus cohærentiam ſoli æqualem et homogeneam, reſiſtentia, quam, dum ſubſident, vincere debent ſublicæ, creſcit in ratione ſuperficierum ſolo impactarum. Si jam

jam statuamus onera cadentia æqualia $O = o$; altitudines quoque æquales $A = a$; patet effectus percussionum et hinc profunditates decrescere prout crescunt tam superficies adactæ quam sublicarum pondera vel massæ. Hinc sub data hypothesi, erunt profunditates in ratione composita e rationibus inversis superficierum et massarum, seu

$$p : P = S \times M : s \times m = \frac{1}{s \times m} : \frac{1}{S \times M}.$$

Si jam omnia sunt inæqualia, nempe onera cadentia, altitudines, massæ sublicarum, et earum superficies in terra conditæ; dico profunditates, singulo ictu acquisitas, esse in ratione composita e rationibus directis onerum cadentium et altitudinum, et e rationibus inversis superficierum et massarum. Concipiamus tertiam sublicam cujus massa $= M$, superficies adacta $= S$; onus impingens $= O$; altitudo, e qua cadit onus $= a$; dicatur profunditas hujus sublicæ ex data percursione proveniens $= \pi$. Tunc erit per antea demonstrata

$$p : \pi = \frac{1}{m \times s} : \frac{1}{M \times S}.$$

$$\pi : P = a \times O : A \times O.$$

$$\text{Ergo } p : P = \frac{a \times o}{m \times s} : \frac{A \times O}{m \times S}.$$

Hæc theoremata inserviunt diversis sublicarum machinis comparandis, praxique exercendæ. Ad determinandum ſumtus operis exſtruendi maxima ſunt utilia; iiſque ſuperſtruimus ſequens problema.

Calculo definire profunditatem ad quam ſingulo ictu ſubſidet ſublica datæ machinæ vi adacta.

Cum in hoc caſu tam onus cadens quam maſſa pali impingendi conſtans ſit et æqualis; erit $\mathrm{O} = o$, et $\mathrm{M} = m$. Hinc explicata proportio fundamentalis in ſequentem abit.

$$p : \mathrm{P} = \frac{a}{s} : \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{S}}.$$

Porro ſuperficies ſublicarum terræ impactarum ſunt rectangula eandem baſin ſed diverſam altitudinem p et P habentia (P hic ſignificat profunditatem totalem). Quapropter $s : \mathrm{S} = p : \mathrm{P}'$, id quod ſimpliciorem et commodiorem ſubminiſtrat analogiam:

$$p : \mathrm{P} = \frac{a}{p} : \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{P}'}.$$

Poſt percurſiones quaſdam factas, adeo ut firmiter terræ inhæreat ſublica, fiat denique novus ictus, quem pro primo numeramus, tum cadat onus ex altitudine $= a$ et ſubſideat ſublica profunditate $= p$. Fiat tum ſecundus ictus, tunc ſubſidebit palus profunditate $= x$. Onus cadet per altitudinem $\mathrm{A} = a + p$, et ſublicæ profunditas totalis erit $= \mathrm{P} = p + x$. Facta jam debita ſubſtitutione habemus.

$$p : x = \frac{a}{p} : \frac{a+p}{p+x}.$$

Ex

Ex qua analogia originem ducit ſequens æquatio.

$$px + x^2 = p^2 + \frac{p^3}{a}.$$

Quæ æquatio quadratica, ſi reſolvatur, dabit valorem incognitæ

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{4}p^2 + \frac{p^3}{a}} - \frac{1}{2}p,$$

Applicemus calculum ad datum exemplum. Sit altitudo, e qua decidit onus percutiens $a = 3$ ped $= 36$ pol. Profunditas ad quam primo ictu ſubſidet ſublica $= p =$ 4 pol. dicatur jam profunditas ad quam ſecundo ictu ſubſidebit $= x$; erit:

$$4 : x = \frac{36}{4} : \frac{40}{4+x}$$

$$4x + x^2 = \frac{160}{9}$$

$$x = 2\tfrac{2}{3} \text{ pol.}$$

Secundo ictu ſublica ſubſidet numero rotundo 3 pol. In tertio ictu erit altitudo, quam percurrit onus impingens $= 36 + 4 + 3 = 43$ pol. Profunditas ſublicæ $= 4 + 3 = 7$ pol. Denique profunditas tertio ictu acquiſita $= x$; tunc,

$$4 : x = \frac{36}{4} : \frac{43}{7+x}$$

$$7x + x^2 = \frac{172}{9}$$

$$x = \frac{11}{7} : \frac{7}{2} = 2 \text{ pol. quam proxime.}$$

In quarto ictu eſt altitudo $= 36 + 4 + 3 + 2 = 45$ pol. et profunditas ſublicæ $= 4 + 3 + 2 = 9$ pol. Profunditas quarto ictu acquiſita $= x$; tunc erit,

4 : x

$$4 : x = \frac{36}{4} : \frac{45}{9+x}$$

$$9x + x^2 = \frac{180}{9}$$

$$x = \frac{12}{2} - \frac{9}{2} = 1\tfrac{1}{2} \text{ pol. quam proxime.}$$

Idem problema fibi folvendum fumfit D. BELIDOR. Supponit fublicam primo ictu fubfidere 15 pol. Tunc juxta ejus calculos fecundo ictu fubfidebit 17; tertio 19; quarto 21; quinto 23. Quis autem non vidit hanc progreffionem cum theoria et experientia pugnare? Profunditas enim fingulo ictu acquifita continuo decrefcit, et tandem fublica repetitis ictibus non amplius fubfidet. Id quod evenit, quando cohærentia foli et frictio major eft vi a percurfione oriunda. Eo in cafu fublica profundius adigi non poteft nifi augeantur vel onus percutiens vel altitudo, e qua cadit.

In actis Academiæ Stockholmienfis mechanicus quidam haud incelebris ftatuit fublicam ponderibus oneratam in hoc cafu ulterius et profundius in terram adigi poffe. Verum fi fublica ita oneratur, idem eft ac fi fublicæ maffa major effet, quod non auget fed impedit effectum percurfionis. Ad adigendam fublicam pondus impofitum agit fola preffione, quæ pro infenfibili eft habenda refpectu refiftentiæ et frictionis. Si vero onus impingens augeatur, certiffime quoque augebitur percuffio. Quam rem theoria et experientia confirmant; notum

enim

enim eſt ex experimentis D. CAMUS malleum 12 librarum ambabus manibus elevatum et proinde ex altitudine 5 pedum cadentem eundem effectum reddere ac ſimplex preſſio 1000 librarum.

Determinare maximam profunditatem, ad quam ſublica data machina datâ adigi poteſt.

Sit altitudo, quam onus percurrit in primo ictu $=a$; profunditas per primum ictum acquiſita $=p$; poſt factas complures percuſſiones ſublica ſubſidet quantitate admodum parva $=m$; et tum operæ pretium non eſt plures dare percuſſiones. Profunditas totalis antea acquiſita $=x$; et altitudo, quam onus percutiens deſcribit $=a+x$. Hinc,

$$p : m = \frac{a}{p} : \frac{a+x}{x}.$$

Ex reſolutione hujus æquationis invenitur,

$$x = \frac{ap^2}{am-p^2}.$$

Sit $p=4$ pol.; $m=\frac{1}{10}$ pol.; $a=36$ pol.; invenitur maxima profunditas $x=\frac{36\times 16}{\frac{36}{10}-16} = -576 : \frac{124}{10} = -46{,}6$ pol. Hæc quantitas negativa eſſe debet, cum oppoſita ſit altitudini, quæ inſtar poſitivæ eſt aſſumpta.

Corodinis loco ſequentes practicas obſervationes adjungimus. 1. Pondus oneris impingentis ut plurimum eſt 800 libr. Vis hominis onus continuo labore elevantis circiter 40 lib. æſtimanda eſt. Hinc in machina ſimplici 20 homines onus elevare valent. Ictibus autem 25 vel 30 datis, ut per æquale temporis ſpatium requieſcant neceſſe eſt. 2. Ad percuſſiones 30 dandas et requiem capiendam 4 minuta prima requiruntur, adeo ut per integram horam 450 ictibus ſublicam percutere liceat. 3. Virium impedimentum eſt, ſi diameter trachleæ ſuperioris, cui funis onus elevans circumvolvitur ſit juſto minor. 4. Si onus impingens ope manuum et non mediante axi in peritrochio eſt elevandum, altitudo, quam percurrit onus, non ſuperare poteſt 5 pedes quos ſolummodo emetiri poſſunt homines brachiorum liberô motu. 5. Quando plures adigendæ ſunt ſublicæ, prodeſt opus incipere a medio, et ad extremitates procedere, ſi enim contrario modo rem aggreſſus fueris, ſublicæ intermediæ adigi non poſſunt ſine opere et temporis diſpendio propter ſoli compactionem. 6. Antequam opus incipiatur, terra eſt examinanda et ſublica probatoria adigenda, ut exactam de ſoli qualitate ejuſque ſtratis habeas cognitionem. 7. His præſuppoſitis, æſtimari poſſunt ſumtus ad ſeriem ſublicarum adigendam neceſſarii. Ad machinam transferendam et ſingulas ſublicas perpendiculariter erigendas requiruntur 15 minuta prima. Ex ictibus probatoriis juxta precedentia problemata calculari poſſunt numerus percuſſionum per ſingula ſtrata et hinc tempus totum requiſitum. Tandem ex longitudine operis, ex pretio et numero ſublicarum æſtimari poſſunt ſumtus omnes quos impendere oportet.

Havniæ, 30 Auguſti 1778.